第２講　電磁気学

3

図１のように，抵抗値Rの抵抗器，自己インダクタンスLのコイル，電気容量Cのコンデンサーが，角周波数ωの交流電源に直列に接続された電気回路がある。この回路に流れる電流Iを$I=I_0\sin\omega t$，交流電源の電圧Vを$V=V_0\sin(\omega t+\varphi)$とする。ただし，$I_0$，$V_0$，$\varphi$はそれぞれ電流の最大値，電圧の最大値，電流と電圧の位相差とする。また，時間をtとする。

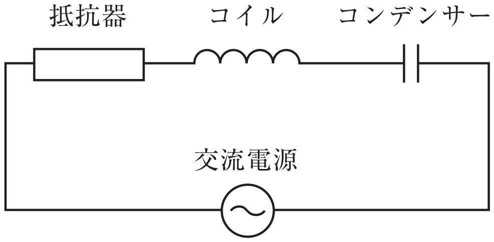

図１

(1)　直列接続であるため，各素子に流れる電流は等しい。抵抗器，コイル，コンデンサーの両端にかかる電圧をそれぞれV_R，V_L，V_Cとしたとき，これらを表す式として正しいものを次の①～⑨の内から一つずつ選んで番号を答えなさい。なお，V_RはIと同位相で，V_LはIに対し位相が$\dfrac{\pi}{2}$だけ進んでおり，V_CはIに対し位相が$\dfrac{\pi}{2}$だけ遅れている。

①　$RI_0\sin\omega t$　　②　$\omega RI_0\sin\omega t$　　③　$\omega RI_0\cos\omega t$

④　$\omega L\sin\omega t$　　⑤　$\omega LI_0\cos\omega t$　　⑥　$2\pi\omega LI_0\cos\omega t$

⑦　$-\dfrac{I_0}{\omega C}\sin\omega t$　　⑧　$\dfrac{I_0}{\omega C}\cos\omega t$　　⑨　$-\dfrac{I_0}{\omega C}\cos\omega t$

(2)　交流電源の電圧の最大値V_0をI_0，ω，R，Cのうち必要なものを用いて求めなさい。また，導出過程を記述しなさい。なお，必要であれば三角関数の公式

$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)\qquad ただし，\tan\alpha=\frac{b}{a}$$

を用いてもよい。

(3)　図２のように，この回路に加える交流電圧の角周波数ωを変化させると，特定の角周波数で大きな電流が流れ共振した。I_0が最大となる角周波数ω_0をI_0，R，L，Cのうち必要なものを用いて求めなさい。

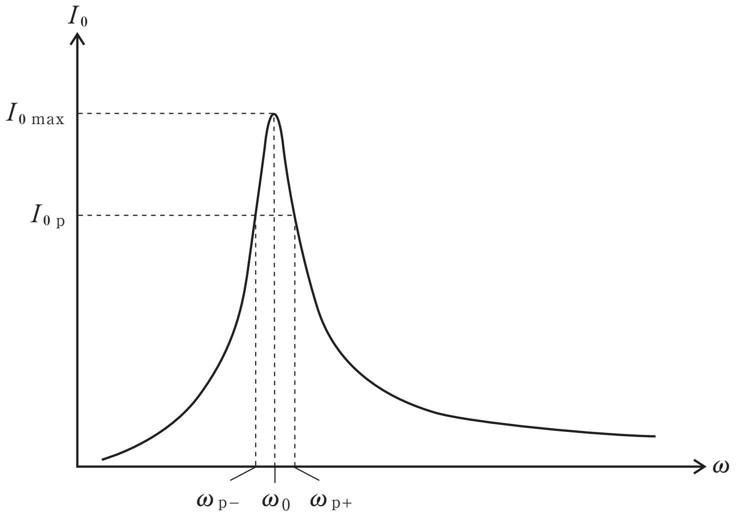

図２

⑷　共振周波数が10HzになるためのLの条件を，I_0，R，Cのうち必要なものを用いて求めなさい。

⑸　図２に示すようにI_0が最も大きい状態I_{0max}の$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$倍の値をI_{0p}とし，そのときの角周波数をω_{p+}とω_{p-}($\omega_{p+}>\omega_{p-}>0$)とする。$\omega_{p+}$と$\omega_{p-}$の差を求める過程を記した次の文章の空欄［　イ　］・［　ロ　］に当てはまる式を求めなさい。

問題文より，$I_{0p}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}I_{0max}$である。従って，回路のインピーダンスについて$\omega_p$($=\omega_{p+}$，$\omega_{p-}$)，$R$，$L$，$C$を用いて表すと$\sqrt{R^2+\left(\omega_p L-\dfrac{1}{\omega_p C}\right)^2}=$［　イ　］となる。よって，この式の解の差$\omega_{p+}-\omega_{p-}$は［　ロ　］となる。

⑹　$\omega_{p+}-\omega_{p-}$を小さくすると，回路に流れる電流が増大する角周波数の範囲を狭め，I_{0max}を大きくすることができる。これを実現するためには，Rはどのような状態が望ましいか。次の①～⑥の内から一つ選んで番号を答えなさい。

①　$R\to\infty$　　②　$R\to 0$　　③　$R=LC$

④　$R=\sqrt{LC}$　　⑤　$R=\dfrac{1}{LC}$　　⑥　$R=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

4

図１のように，水平な平面上に固定された２本の平行なレール甲，乙と，そのレール上に置かれた電気抵抗をもつ２本の棒１，２よりなる装置がある。２本のレールは導体でできており，x軸に平行になるように間隔ℓで配置されている。レール間にはスイッチを介して静電容量Cのコンデンサーが接続されており，レール甲は接地されている。２本の棒はy軸に平行になるようにレール上に置かれ，向きを保ったままレール上をx軸の向きになめらかに動くことができる。棒１と棒２の質量をそれぞれm_1とm_2とする。また，棒１と棒２をレール間に渡したときの電気抵抗はそれぞれR_1，R_2である。$x \geqq 0$の部分には鉛直上向きに磁束密度の大きさBの一様な磁場がかけられている。$x < 0$の部分の磁束密度の大きさは０である。

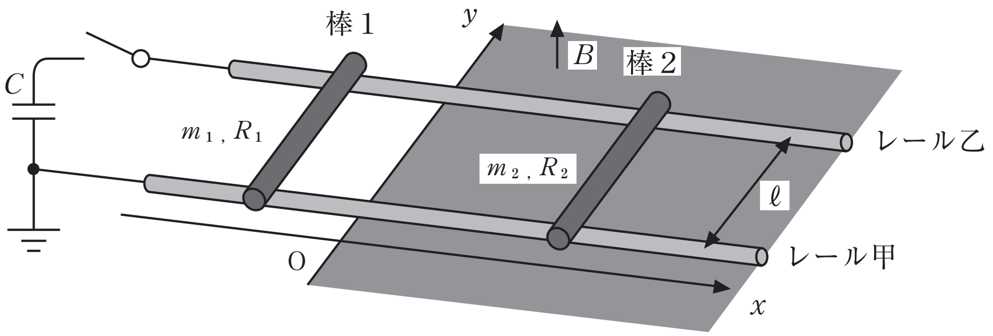

図１

レールと棒の太さは無視できるとする。レールは十分に長く，実験中に棒が端に達することはない。また，棒１と棒２は十分離れており，実験中互いに接触しないものとする。レールと棒の摩擦や空気抵抗，棒以外の電気抵抗，回路を流れる電流により発生する磁場，レール間の静電容量は無視できる。

以下では，棒を流れる電流はy軸正方向を正とし，棒の速度，運動量，棒にはたらく力はx軸正方向を正とする。解答には，小問中で指定されたもの以外に

$$m_1,\ m_2,\ R_1,\ R_2,\ \ell,\ B,\ C$$

を用いてよい。

〔A〕 まず，図２のようにスイッチを開いた状態で実験を行う。棒２を$x>0$の部分に速度が０になるようにそっと置き，棒１を$x<0$の部分から初速度$v_0(>0)$で滑らせる。

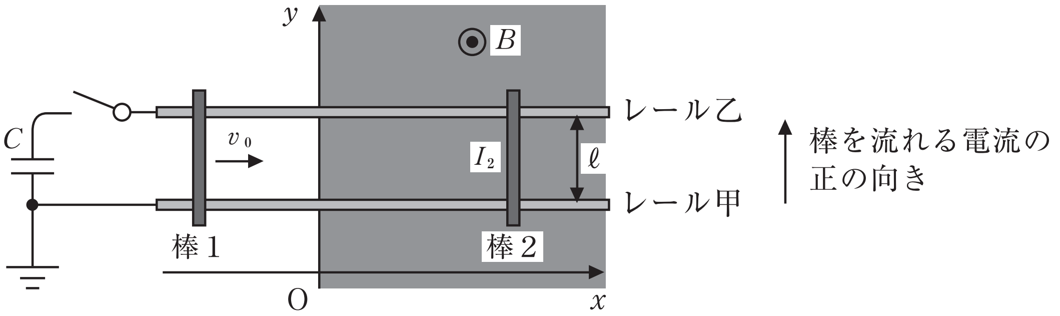

図２

(a) 棒１が$x=0$を通過した直後に棒１に流れる電流I_0を初速度v_0を用いて表せ。

(b) 以下の空欄に入る適切な数式を答えよ。

棒１が$x=0$を通過したあとのある時刻において，棒２を流れる電流をI_2とする。棒２にはたらくローレンツ力fはI_2を用いて$f=$ (ア) と与えられる。微小時間Δtあたりの棒２の速度の変化は$\Delta v_2=\dfrac{f}{m_2}\Delta t$である。このとき棒１には電流$-I_2$が流れるから棒１にはたらくローレンツ力は$-f$であり，棒１の速度の変化は$\Delta v_1=-\dfrac{f}{m_1}\Delta t$である。従って，棒１と棒２の運動量の和の変化は$m_1\Delta v_1+m_2\Delta v_2=0$であり，運動量の和$m_1v_1+m_2v_2$は時間とともに変化しない。

時間が十分経過したあと，それぞれの棒の速度が変化しなくなった。このとき，それぞれの棒にはたらくローレンツ力は０であるから，棒に電流は流れていないはずである。従って十分時間が経過したあとの棒１の速度$v_{1\infty}$と棒２の速度$v_{2\infty}$の間に，運動量保存の式とは別に，関係 (イ) が成り立つ。このことから，時間が十分経過したあとの棒１の速度$v_{1\infty}$とレール乙の電位V_∞はv_0を用いて$v_{1\infty}=$ (ウ)，$V_\infty=$ (エ) と表すことができる。

(c) 棒１に初速度を与えてから最終的にそれぞれの棒の速度が変化しなくなるまでに，棒１で発生したジュール熱Q_1をv_0を用いて表せ。

〔B〕 今度は，図３のようにスイッチを閉じた状態で同様の実験を行う。棒２を$x>0$の部分に速度が０になるようにそっと置き，棒１を$x<0$の部分から初速度$v_0(>0)$で滑らせる。はじめコンデンサーは充電されていないものとする。

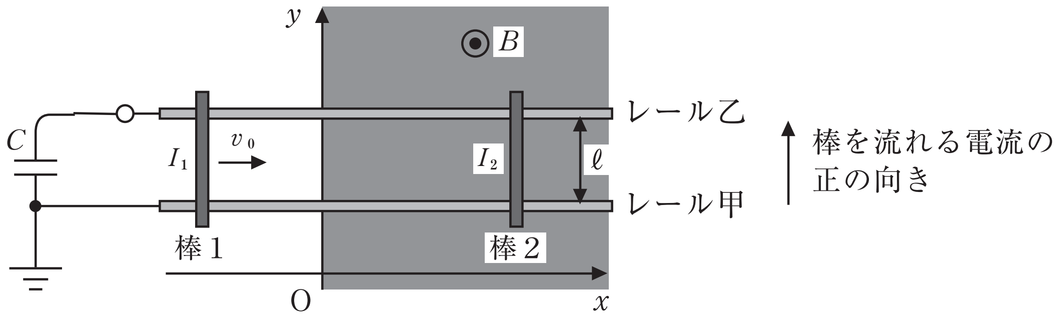

図 3

(d) 以下の空欄に入る適切な数式を答えよ。

棒１が$x=0$を通過したあとのある時刻において，レール乙の電位をV，棒1と棒２を流れる電流をそれぞれI_1，I_2とし，微小時間Δtあたりの棒１と棒２の速度の変化をそれぞれΔv_1，Δv_2とする。Δtあたりの棒１と棒２の運動量の変化の合計をI_1とI_2を用いて表すと$m_1\Delta v_1+m_2\Delta v_2=$ (オ) Δtとなる。また，Δtあたりのレール乙の電位の変化ΔVをI_1とI_2を用いて表すと$\Delta V=$ (カ) Δtとなる。

これら２つの式より

$$m_1\Delta v_1+m_2\Delta v_2+\boxed{(キ)}\,\Delta V=0$$

が成り立つので，

$$m_1v_1+m_2v_2+\boxed{(キ)}\,V$$

は時間とともに変化しない。

(e) 十分時間が経過したあと，それぞれの棒の速度が変化しなくなった。このときの棒１の速度$v_{1\infty}$とレール乙の電位V_∞をv_0を用いて表せ。

(f) 棒１に初速度を与えてから最終的にそれぞれの棒の速度が変化しなくなるまでに，棒１と棒２で発生したジュール熱の合計Qを，棒１の初速度v_0，棒１の最終的な速度$v_{1\infty}$および最終的なレール乙の電位V_∞を用いて表せ。

第２講　解答

3

(1)　V_{R}：①　V_{L}：⑤　V_{C}：⑨

(2)　$I_0\sqrt{R^2+\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}$

(3)　$\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

(4)　$\dfrac{1}{400\pi^2 C}$

(5)　イ：$\sqrt{2}R$　ロ：$\dfrac{R}{L}$

(6)　②

4

〔A〕

(a)　$-\dfrac{Blv_0}{R_1+R_2}$

(b)　(ア)　BI_2l　(イ)　$v_{1\infty}=v_{2\infty}$

(ウ)　$\dfrac{m_1}{m_1+m_2}v_0$　(エ)　$-\dfrac{m_1Blv_0}{m_1+m_2}$

(c)　$\dfrac{R_1m_1m_2}{2(R_1+R_2)(m_1+m_2)}v_0{}^2$

〔B〕

(d)　(オ)　$Bl(I_1+I_2)$　(カ)　$\dfrac{I_1+I_2}{C}$　(キ)　$-CBl$

(e)　$v_{1\infty}=\dfrac{m_1}{m_1+m_2+C(Bl)^2}v_0$

$V_{\infty}=\dfrac{m_1Blv_0}{m_1+m_2+C(Bl)^2}$

(f)　$\dfrac{1}{2}m_1v_0{}^2-\left\{\dfrac{1}{2}(m_1+m_2)v_{1\infty}{}^2+\dfrac{1}{2}CV_{\infty}{}^2\right\}$